

圧縮センシングの基礎とその応用

大阪市立大学大学院工学研究科

林 和則

kazunori@eng.osaka-cu.ac.jp

概要

- 準備
- 線形観測にもとづく連立方程式
- 正則化
- 圧縮センシングの問題
- l_0 再構成と l_1 再構成
- 離散値ベクトルの再構成
- 応用例

準備：ノルム

ベクトルを $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ とすると…

$$\ell_2\text{-ノルム} : \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\ell_1\text{-ノルム} : \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\ell_0\text{-ノルム} : \|\mathbf{x}\|_0 = (\mathbf{x} \text{ の非ゼロ要素数})$$

ノルムの公理：

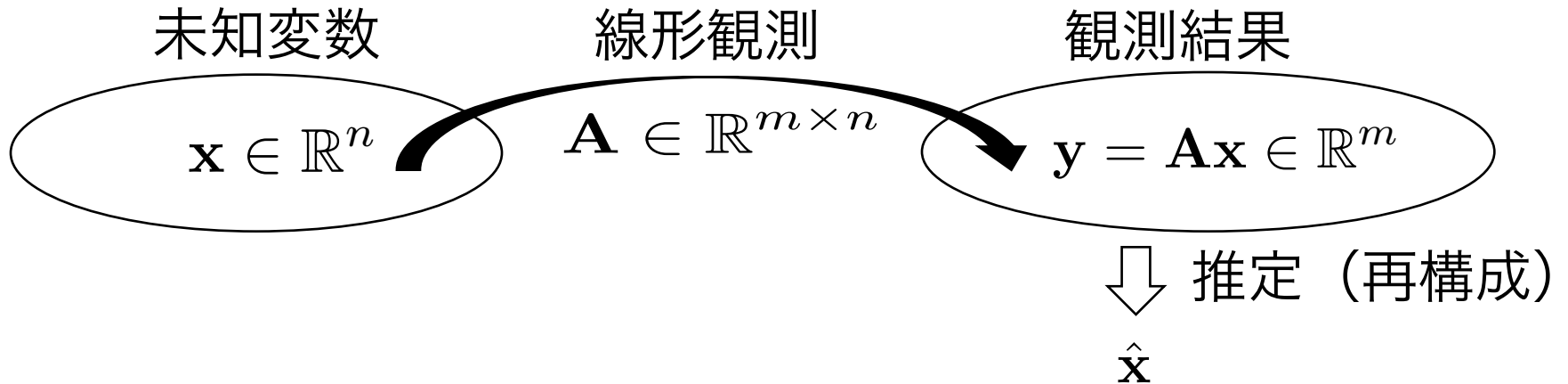
$$(i) \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(ii) \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\left(\begin{array}{l} \ell_p\text{-ノルム } (p \geq 1): \\ \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right)$$

線形観測にもとづく連立1次方程式



- 興味のある未知変数 \mathbf{x} は直接観測できない
- 未知変数に行列 \mathbf{A} を乗算したものが観測可能 (線形観測)
- 観測結果 \mathbf{y} と観測行列 \mathbf{A} の情報から \mathbf{x} を推定 (再構成)
- 式の数によらず, 「真の解」はただ一つ
 (数学の問題では方程式を満たすものは全て「真の解」)
- 雑音を含んでいるかもしれない $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$

「線形観測にもとづく」連立1次方程式：
 (変数の数) $n =$ (式の数) m の場合 (雑音なし)

$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$	観測行列 (既知) :	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
	未知ベクトル :	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
	観測ベクトル (既知) :	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$



$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

連立1次方程式を解けば解が一意に定まり、それは観測された未知変数に一致する (\mathbf{A} が特異でないとき)

「線形観測にもとづく」連立1次方程式：
 (変数の数) $n <$ (式の数) m の場合 (雑音なし)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

観測行列 (既知) : $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 未知ベクトル : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
 観測ベクトル (既知) : $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$



$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

線形観測にもとづく方程式では矛盾する式は出てこない。
 連立1次方程式を解けば解が一意に定まり、それは観測された未知変数に一致 (\mathbf{A} が列フルランクのとき)

「線形観測にもとづく」連立1次方程式：
 (変数の数) $n >$ (式の数) m の場合 (雑音なし)

$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$	観測行列 (既知) :	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
	未知ベクトル :	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
	観測ベクトル (既知) :	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

「連立方程式の解」が無数個存在し、その中の一つが求めたい
 「真の解」。どうやってそれを見つけ出すか？

\mathbf{A} の零空間 (Null Space) : $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}\}$

$\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ のとき, \mathbf{x} が解なら $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ も解

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

正則化

- 方程式を満足する解の候補のうち, 「大きさ (ノルム)」が最小のものを選択するという方法
- 正則化のノルムとして ℓ_2 ノルムが広く用いられてきた.

-最小ノルム解(ℓ_2 ノルムが最小の解を選択) :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{\text{MN}} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{y}\end{aligned}$$

理由: 最適化問題が簡単に解ける,
電力が最小の解が得られる, など

でも...

「真の解」が得られるわけではない.
他のノルムを使わない理由はない

圧縮センシングの問題

真の解がスパースであることが事前に分かっているときに、
 $n > m$ の線形観測にもとづく連立方程式を解く問題

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

観測行列 (既知) : $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

未知ベクトル : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

観測ベクトル (既知) : $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

不良設定 : $n > m$

未知ベクトルはスパース : $\|\mathbf{x}\|_0 \ll n$

ℓ_0 再構成

- ℓ_0 最適化問題：

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_0} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

- $m > \|\mathbf{x}\|_0$ であれば、ほとんどいつでも正しい解
- ℓ_0 ノルムの離散性と非凸性から解くのが困難
(一般にNP困難)

ℓ_1 再構成

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_0} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

$$\Downarrow \quad \|\mathbf{x}\|_0 \text{ を } \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ で置き換え}$$

- ℓ_1 最適化問題：

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

- 線形計画問題に帰着される（実際に計算機で解ける）
- ある条件の下では $n > m$ であっても「真の解」が完全に再構成できる理論的な保証がある
- 未知変数の数よりも少ない（圧縮された）観測（センシング）で再構成できるので「圧縮センシング」

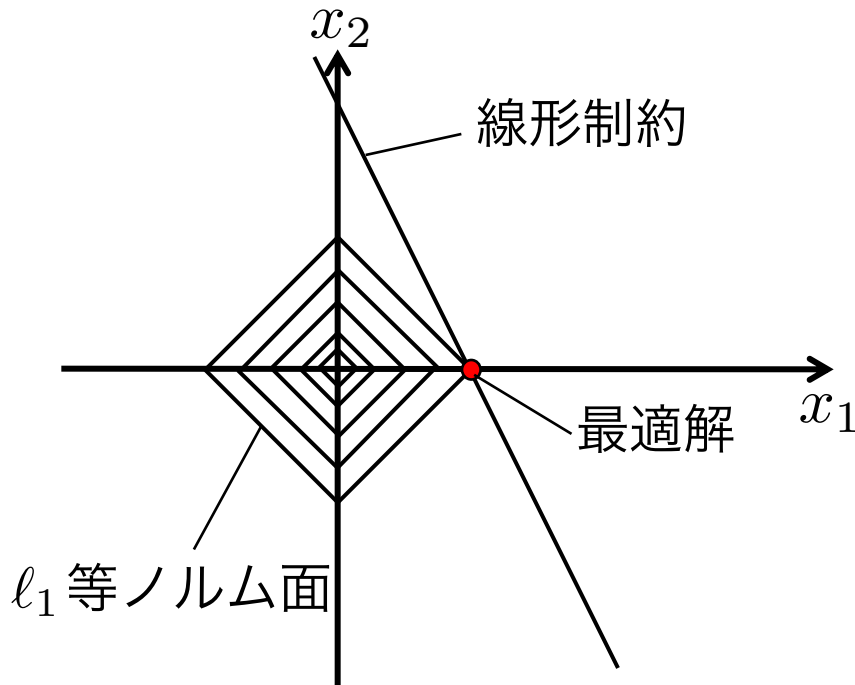
l_1 正則化でスパースな解が得られる理由

$$l_1 \text{ 正則化: } \hat{\mathbf{x}}_1 = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } 2x_1 + x_2 = 4$$

$$= \arg \min_{\mathbf{x}} (|x_1| + |x_2|) \quad \text{subject to } 2x_1 + x_2 = 4$$

$$r = |x_1| + |x_2|$$

$$= \begin{cases} x_1 + x_2 & (\text{第1象限}) \\ -x_1 + x_2 & (\text{第2象限}) \\ -x_1 - x_2 & (\text{第3象限}) \\ x_1 - x_2 & (\text{第4象限}) \end{cases}$$



最適解: $r \geq 0$ を0から増加させたときに、最初に l_1 等ノルム面が線形制約に触れる点

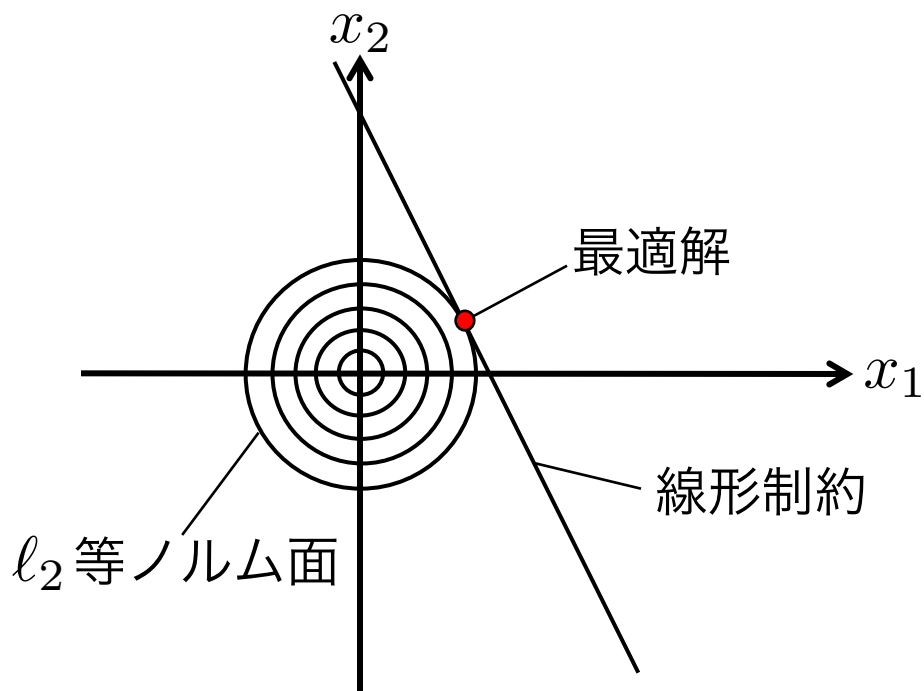
最適解は座標軸上



スパースな解

l_2 正則化でスパースな解が得られない理由

$$\begin{aligned}
 l_2 \text{ 正則化: } \hat{\mathbf{x}}_2 &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{subject to } 2x_1 + x_2 = 4 \\
 &= \arg \min_{\mathbf{x}} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{r = x_1^2 + x_2^2} \quad \text{subject to } 2x_1 + x_2 = 4
 \end{aligned}$$



最適解:

半径 $r \geq 0$ を0から増加させたときに、最初に l_2 等ノルム面が線形制約に触れる点

最適解は一般に座標軸上ではない (スパースではない)

観測に雑音があるとき

不等式 l_2 制約付き l_1 正則化：

$$\hat{\mathbf{x}}_{l_1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon \quad (\epsilon > 0)$$

- 雑音が有界のとき自然な制約条件
- ガウス雑音の場合にも再構成の精度保証がある

l_1 - l_2 最適化：

$$\hat{\mathbf{x}}_{l_1-l_2} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right)$$

- ある λ に対して、不等式 l_2 制約付き l_1 正則化と同じ解

不等式 l_1 制約付き l_2 正則化：

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LASSO}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq t \quad (t > 0)$$

-LASSO (Least absolute shrinkage and selection operator)

離散値ベクトルの再構成：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

観測行列（既知）： $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 未知ベクトル： $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$
 観測ベクトル（既知）： $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$
 不良設定： $n > m$
 未知ベクトルは離散値： $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$

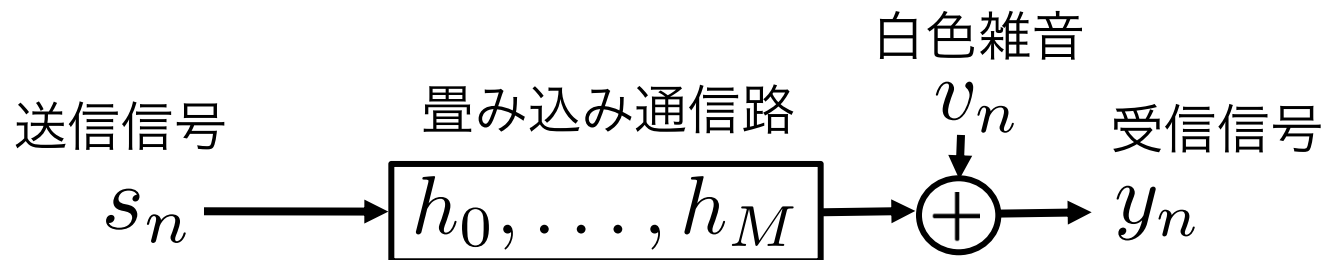
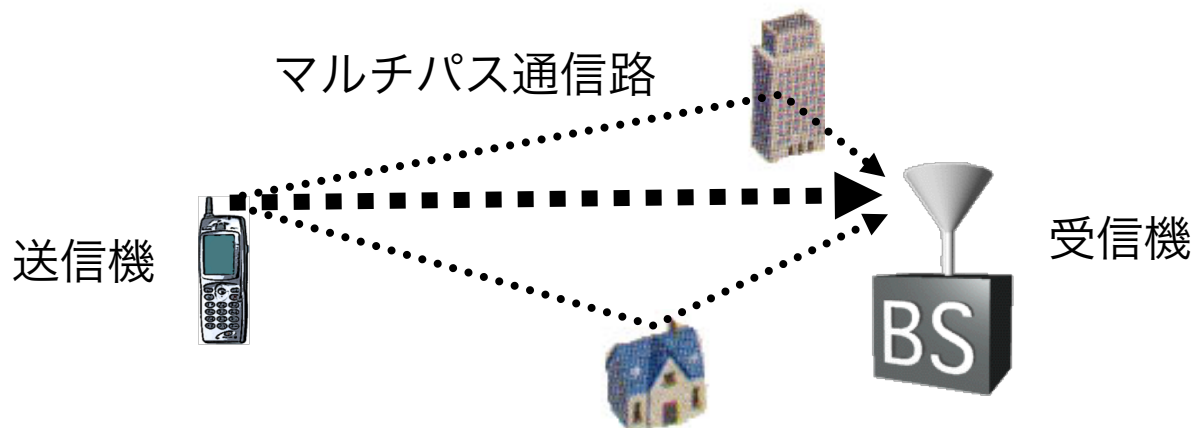
-SOAV(sum of absolute values)最適化問題：

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{1}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{1}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

-理論限界: (対称信号点配置, AMPアルゴリズム)

$$2\text{値のとき } m > \frac{n}{2}, \quad K\text{値のとき } m > \left(1 - \frac{1}{K}\right) n$$

インパルス応答推定 (1/3)



$$y_n = \sum_{m=0}^M h_m s_{n-m} + v_n$$

受信信号から通信路のインパルス応答を推定する問題

インパルス応答推定 (2/3)

-受信信号モデル (行列表現) : $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_{P-M}]^T$
 $= \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v}$

通信路行列 : $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_M & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_M & & h_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_M & \dots & h_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(P-M) \times P}$

既知信号 : $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_P]^T \in \mathbb{R}^P$

白色雑音 : $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_{P-M}]^T$

-受信信号モデル (書き直し) : $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{h} + \mathbf{v}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{M+1} & s_M & \dots & s_1 \\ s_{M+2} & s_{M+1} & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_P & s_{P-1} & \dots & s_{P-M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(P-M) \times (M+1)}$$

$$\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_M]^T \in \mathbb{R}^{M+1}$$

インパルス応答推定 (3/3)

-従来のアプローチ：

最小2乗解 ($P - M \geq M + 1$) : $\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y}$

最小ノルム解 ($P - M < M + 1$) : $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{y}$

-通信路応答のスパース性：

無線通信路のインパルス応答は離散的。
帯域が広くなるとその性質が顕著に表れる。

-圧縮センシングによる推定：

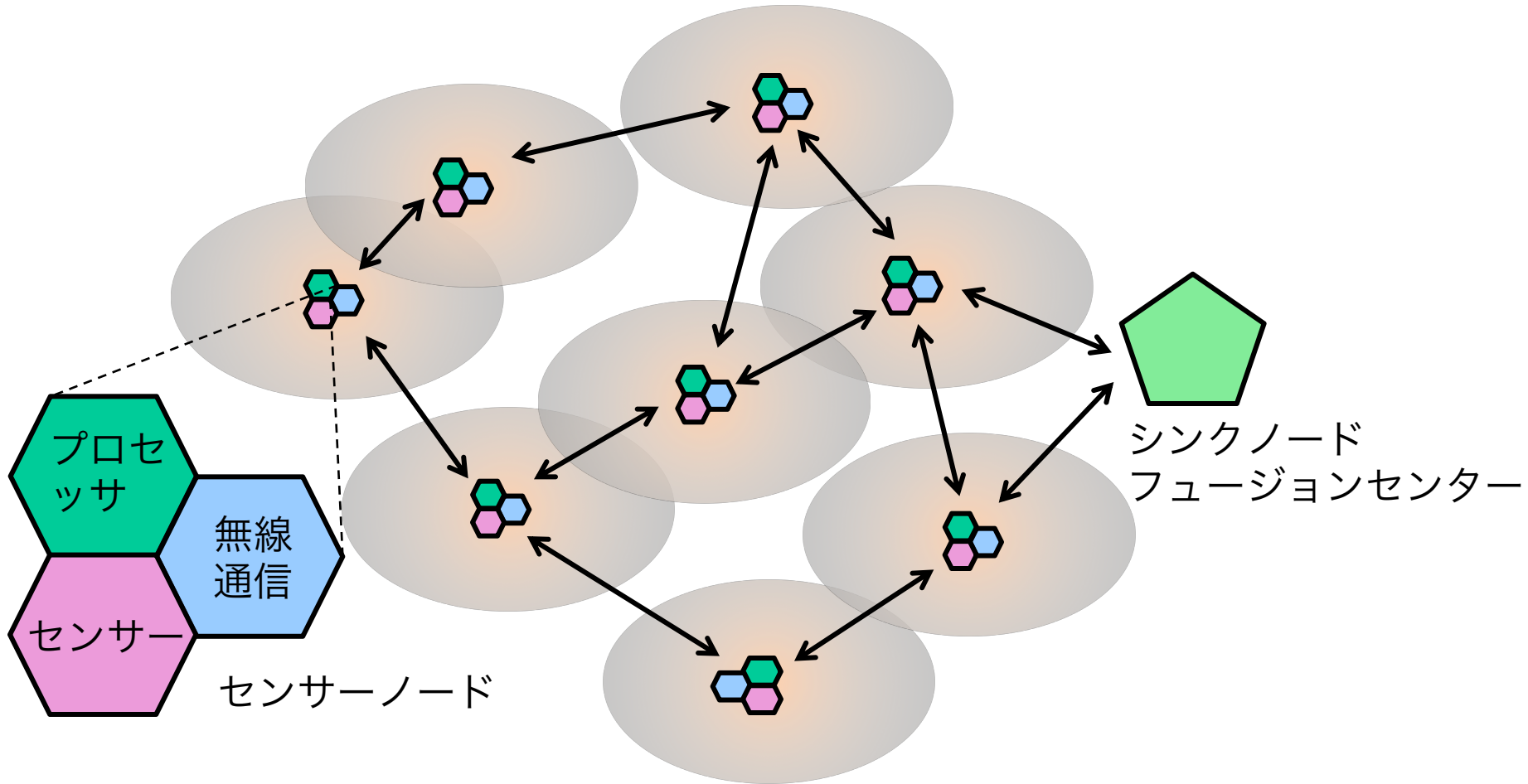
$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{S}\mathbf{h} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon$$

\mathbf{S} : 観測行列 (ランダム、テプリッツ)

\mathbf{h} : 未知のスパースベクトル

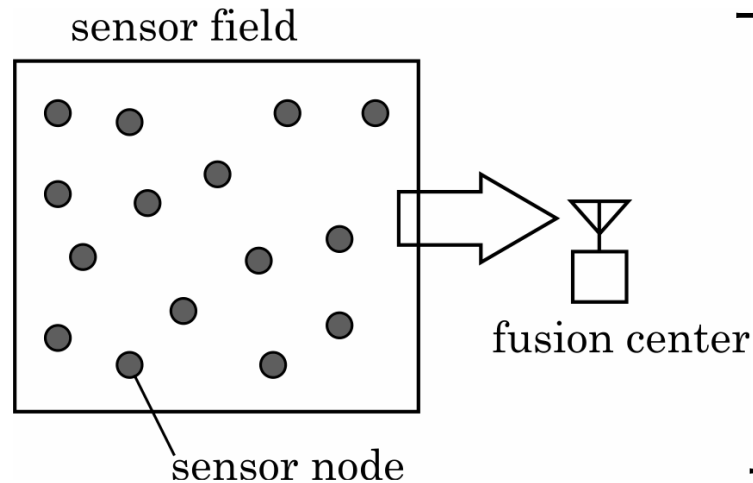
メリット : 既知信号の削減 (周波数利用効率向上)

無線センサーネットワーク (1/3)



通信機能や計算能力を持つセンサーノードを観測対象の領域に配置し、それらによって集められたデータから所望の情報を抽出

無線センサーネットワーク (2/3)



-送信信号@時刻 i , @ j -thノード :

$$A_{i,j} s_j$$

s_j :観測データ

$A_{i,j}$:ランダム係数
(各ノードのidから生成)

-受信信号@時刻 i :

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} s_j + v_i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y_1, \dots, y_m]^T \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

無線センサーネットワーク (3/3)

-観測データのスパース性：

$$\mathbf{s} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x} \quad (\mathbf{\Phi} : \text{DFT, DCT, waveletなど可逆な変換行列})$$

\mathbf{s} そのものではなく、ある変換領域での表現がスパース
(観測データの空間的な相関による)

-圧縮センシングによるデータ復元：

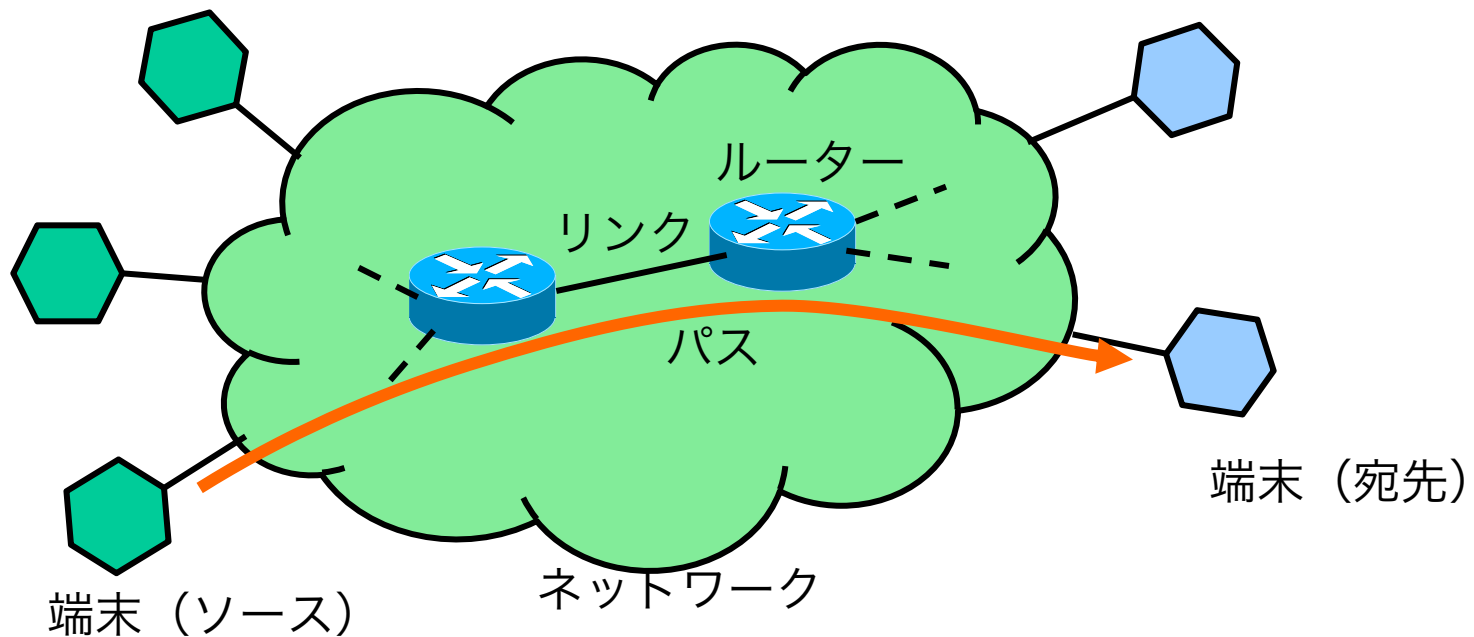
$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{A} \mathbf{\Phi} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon$$

$\mathbf{A} \mathbf{\Phi}$: 観測行列

\mathbf{x} : 未知のスパースベクトル

メリット：観測（データ収集）時間の短縮

ネットワークトモグラフィ (1/4)



- エンド-エンド間の観測からリンクレベルのパラメータを推定
- リンクレベルの観測からエンド-エンド間の特性を推定

ネットワークトモグラフィ (2/4)

リンク遅延の推定

- リンク e_j の遅延 : x_j
- i 番目のパス全体の遅延 :

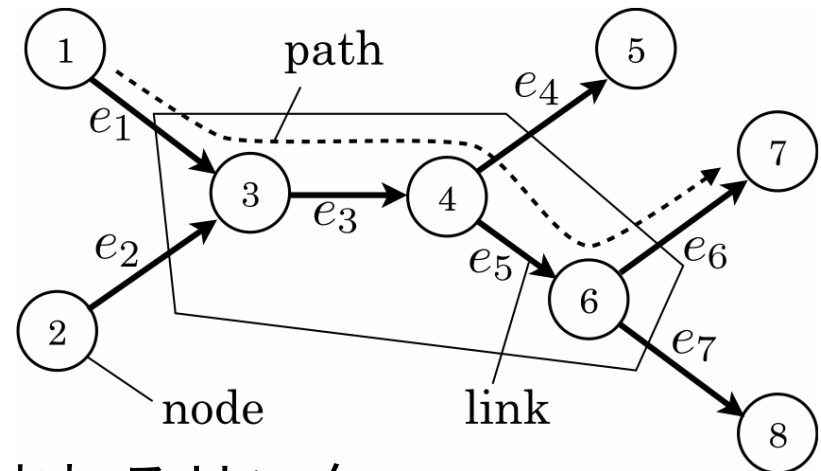
$$y_i = \sum_{j \in \mathcal{P}_i} A_{i,j} x_j$$

\mathcal{P}_i : i 番目のパスに含まれるリンク
のインデックス集合

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & j \in \mathcal{P}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

\mathbf{A} : ルーティング行列



ネットワークトモグラフィ (3/4)

リンク遅延の推定

-リンク遅延のスパース性：

ほとんどのリンク遅延は通常小さく，大きな遅延は機器の故障や極端なトラフィックの集中などに起因

-圧縮センシングによる推定：

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

\mathbf{A} ：観測行列（ルーティング行列）

\mathbf{x} ：未知のスパースベクトル（厳密にスパースではない）

メリット：プローブパケット数の削減

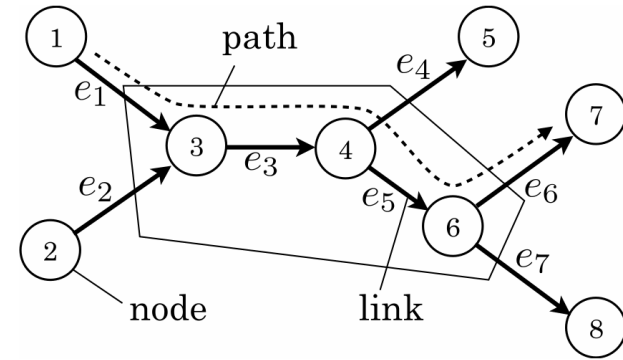
ネットワークトモグラフィ (4/4)

リンクロス確率の推定

-リンク e_j のロス確率: p_j

- i 番目のパス全体のロス確率: q_i

- i 番目のパス全体のロスしない確率: $1 - q_i = \prod_{j \in \mathcal{P}_i} (1 - p_j)$



$$-\log(1 - q_i) = -\log \left(\prod_{j \in \mathcal{P}_i} (1 - p_j) \right)$$

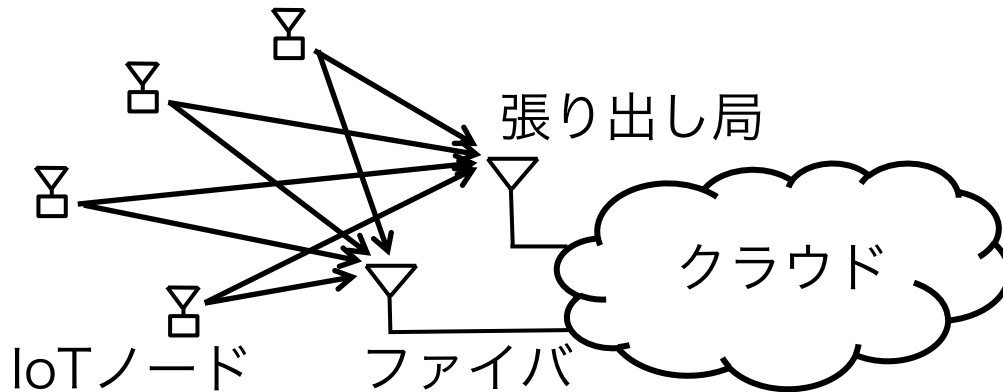
$$= -\sum_{j \in \mathcal{P}_i} \log(1 - p_j)$$

$$\Downarrow \quad \begin{aligned} y_i &= -\log(1 - q_i) \\ x_j &= -\log(1 - p_j) \end{aligned}$$

$$y_i = \sum_{j \in \mathcal{P}_i} A_{i,j} x_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

IoT環境でのデータ収集

データ収集のシナリオ：



多数のIoTノードからの
スモールデータを少
数の張り出し局で収集

⇒ 劣決定の再構成問題

離散性を利用した信号再構成：

$$m \begin{matrix} \updownarrow \\ \mathbf{y} \\ \updownarrow \\ m \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} \leftarrow n \rightarrow \\ \mathbf{H} \\ \leftarrow n \rightarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} \updownarrow \\ \mathbf{s} \\ \updownarrow \\ n \end{matrix} \end{matrix} + \begin{matrix} \updownarrow \\ \mathbf{v} \\ \updownarrow \\ m \end{matrix}$$

\mathbf{s} の成分の離散性
を利用

$$\Rightarrow \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{1}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} + \mathbf{1}\|_1 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2$$

まとめ

圧縮センシング応用のキーポイント：

- 興味のある信号はスパース or 離散値か？
(どの表現で？)
- 連立1次方程式で定式化されるか？
- 式の数が減らせると嬉しいか？
- 係数行列の性質は？